

第四章 Poisson 过程

与许多偶然现象可用 Poisson 分布描述, 大量自然界的物理过程可用 Poisson 过程刻画. 例如

- 电话总机所接收到的传呼次数;
- 交通流中的交通事故数;
- 地震记录;
- 细胞中染色体的交换, 等等.

它们有相同的变化类型, 而每个变化可用时间或空间上的一个点表示. 我们关心随机事件的数目, 称为计数过程.

⇨ 这类过程有两个性质:

- 在时间或空间上的均匀性;
- 未来的变化与过去的变化无关.

⇨ 基于这些性质推导出 Poisson 过程的模型.



- ① 预备知识
- ② Poisson 过程的定义
- ③ 来到间隔与等待时间的分布
- ④ 来到时间的条件分布
 - Poisson 过程的完全随机性
 - 应用
- ⑤ 复合 Poisson 过程
 - 定义及性质
 - 复合Poisson过程在保险精算中的应用



第一节 预备知识

随机序列的独立性

首先需要关注离散型随机序列的独立性.

引理 4.1.1

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是离散随机变量序列, 若

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n), \quad \forall x_1, \dots, x_n.$$

其中 $\{p_i(x), i \geq 1\}$ 满足 $p_i(x) \geq 0, \sum_x p_i(x) = 1$. 那么

$X_i \sim p_i(x)$ 且 X_1, \dots, X_n 相互独立.



Poisson 分布的可分性

可分性可以说是可加性的推广.

定理 4.1.1: (可分性)

设 $N \sim P(\lambda)$, N 个事件独立地(也独立于个数 N)

以概率 p_i 为第 i 个类型, $i = 1, 2, \dots, n$,

其中 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

记 N_i 为第 i 类事件发生的次数,

则 $N_i \sim P(\lambda p_i)$ 且 N_1, N_2, \dots, N_n 相互独立.



证. 对任意非负整数 i_1, \dots, i_n , 令 $k = i_1 + \dots + i_n$, 则

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N_1 = i_1, \dots, N_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(N_1 = i_1, \dots, N_n = i_n | N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda p_1} \frac{(\lambda p_1)^{i_1}}{i_1!} \dots e^{-\lambda p_n} \frac{(\lambda p_n)^{i_n}}{i_n!}, \end{aligned}$$

得证. □



例 4.1.1 考虑随机点在时间 $(0, t]$ 内发生的次数, 记为 $\{N(t), t \geq 0\}$, $N(0) = 0$. 设在 $(t_0, t_0 + t]$ 内有 k 个随机点发生的概率与 t_0 无关, 且

$$N(t_0 + t) - N(t_0) = N(t) \sim P(\lambda t).$$

定义过程 $\{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{若随机点在 } (0, t] \text{ 内发生偶数次,} \\ -1, & \text{若随机点在 } (0, t] \text{ 内发生奇数次,} \end{cases}$$

求 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数.



解. 记 A 表示事件“随机点在 $(0, t]$ 内发生偶数次” $t > 0$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(N(t) = 0) + \mathbb{P}(N(t) = 2) + \mathbb{P}(N(t) = 4) + \cdots \\ &= e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \cdots \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) = 1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}, \\ \mathbb{P}(X(t) = -1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2},\end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}[X(t)] = e^{-2\lambda t}, \quad t \geq 0.$$



第二节 Poisson 过程的定义

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 先定义计数过程(counting process).

定义 4.2.1: 计数过程

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 如果满足:
 $\forall \omega \in \Omega$, 其样本函数

$$t \mapsto N(t) \equiv N(t, \omega)$$

以概率 1 是一个只取非负整数值的, 右连续的, 单调增函数,
则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程.



例 4.2.1 : (计数过程名称的由来)

设 $N(t)$ 为某电话交换台在 $(0, t]$ 内接到呼叫的累计次数,
则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是计数过程.

注意到

◇ 对于 $0 \leq s < t$,

$N(t) - N(s)$ 为 $(s, t]$ 中发生的电话呼叫次数;

◇ 对于 $t \geq 0$,

$\Delta N(t) := N(t) - N(t-)$ 表示在时刻 t 电话的呼叫次数.

#



Poisson 过程

定义 4.2.2 (Poisson 过程)

如果计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足:

- (1) $N(0) = 0$ a.s.;
- (2) $N(t)$ 是独立增量过程: 对任意 $t, s \geq 0$, $N(t+s) - N(s)$ 与 \mathcal{F}_s 独立;
- (3) $N(t)$ 的其增量服从 Poisson 分布: 对任意 $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具参数 λ 的(时齐) Poisson 过程.

通常, 称 λ 是过程的速率或强度.



注. 稀有事件的概率常常是 Poisson 分布的, 后者可视为
二项分布的逼近.

该思想的自然推广:

取时间区间 $[0, \infty)$ 上的两点 $a, b: a < b$,

$N(b) - N(a)$ 表示 $(a, b]$ 内发生的事件数.



例 4.2.2 顾客依速率为 4 人/小时的 Poisson 分布到达某商店, 已知商店上午 9 点钟开门. 求到 9:30 时仅到一位顾客, 而到 11:30 时已到 5 位顾客的概率.

解. 以上午九点作为 0 时刻, 1 小时作为单位时间.
用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内来到的顾客数, 则

$\{N(t)\}$ 是 $\lambda = 4$ 的 Poisson 过程.

所求概率为

$$\mathbb{P}(N(0.5) = 1, N(2.5) = 5)$$

等价定义

命题 4.2.1

随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 如果满足

- (1) 在不相交区间上事件发生的数目相互独立;
 - (2) 对任意 t, h , $N(t+h) - N(t)$ 的分布只与 h 有关;
 - (3) 存在 $\lambda > 0$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时,
$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h);$$
 - (4) 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$,
- 那么 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.



一些实例图片

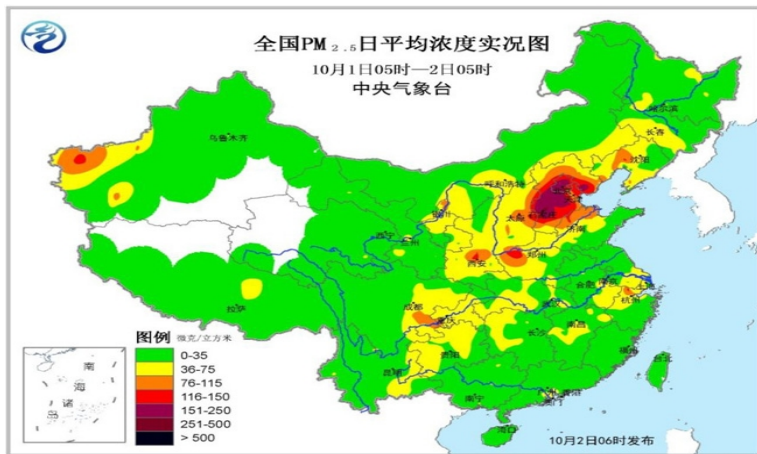


图 1



一些实例图片



图 2



一些实例图片



图 3

一些实例图片



图 4



一些简单性质

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程, 那么

1. $\mathbb{E}[N(t)] = D(N(t)) = \lambda t$;
2. $\text{Cov}(X_s, X_t) = \lambda(s \wedge t)$;
3. 对任意 $s > 0$,

$\{N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$ 也是参数为 λ 的 Poisson 过程, 且

与 $\{N(u), u \leq s\}$ 独立;

4. 对任意 $t > s, n \geq m$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n | N(s) = m) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!},$$

$$\mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$



第三节 来到间隔与等待时间的分布

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的 Poisson 过程.

定义2.3: (两个时间序列)

设 $n \geq 1$, 定义

$$S_n := \inf\{t : N(t) = n\}, \quad S_0 \equiv 0,$$
$$X_n = S_n - S_{n-1}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

则称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为时间间隔序列, $\{S_n, n \geq 1\}$ 为等待时间序列.



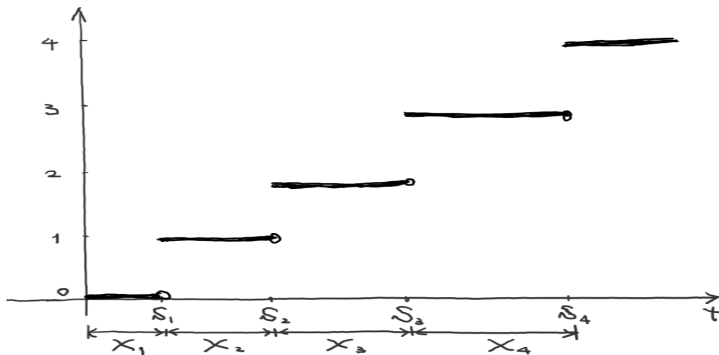


图 4.1 来到时间间隔与等待时间序列

直观上, X_1 为第一个事件的来到时刻,
 X_n 为第 $n-1$ 个到第 n 个事件之间的时间,
 S_n 为第 n 个事件来到的时间(或等待时间), $n \geq 1$.

二者之间的关系:

对任意 $t \geq 0, n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{S_n \leq t\}, \\ \{N(t) = n\} &= \{S_n \leq t < S_{n+1}\} \\ &= \{S_n \leq t\} \setminus \{S_{n+1} \leq t\}.\end{aligned}$$



两个时间序列的分布

命题 4.3.1 (来到时间间隔的分布)

$X_n, n \geq 1$ 为 i.i.d., 均值为 $1/\lambda$ 的指数分布随机变量序列.

命题 4.3.2: (等待时间的分布)

$S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, 即其密度函数为

$$0 \leq t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

特别的, $X_1 \equiv S_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.



例 4.3.1 (例 4.2.2 的续)

顾客依速率为4人/小时的 Poisson 分布到达某商店,
已知商店上午9点钟开门.

- (1) 求第2位顾客在10点前到达的概率;
- (2) 求第1位顾客在9:30前到达且第2位顾客在10点前到达的概率.



时间序列的应用

- step 1. 生成一系列 i.i.d., 均值为 $1/\lambda$ 的指数分布随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$;
- step 2. 令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$: 第 n 个事件发生的时刻;
- step 3. 对于 $t \geq 0$, 定义

$$N(t) := \begin{cases} 0, & t < S_1, \\ k, & S_k \leq t < S_{k+1}, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.



相关应用题

3. (p 136) 某银行有两个窗口可以接受服务, 上午9点小王到达这个银行, 此时两个窗口分别有一个顾客在接受服务, 另外有2个顾客排在小王前面等待接受服务, 一会儿又来了很多顾客. 假设服务的规则是先来先服务, 也就是说一旦有一个窗口的顾客接受完服务, 那么排在队伍中的第一个顾客马上在此窗口接受服务, 假设各个顾客接受服务的时间独立同分布于均值为20分钟的指数分布, 问: 小王在10点钟之前能够接受服务的概率是多少?



排队系统

- 例 3.2.5 (1) (M/G/1 排队系统) 系统中的顾客以参数 λ 到达.
设 $X(t)$ 是 t 时刻系统中的顾客数, Z_1, Z_2, \dots 为依次来到
的顾客接受服务的时间, 独立同分布于分布函数 G .
假设 $\{X(t)\}$ 与 $\{Z_n\}$ 相互独立.
注. $\{X(t), t \geq 0\}$ 不是 Markov 链.
(因为 G 是任意分布, 不是无记忆的分.)

引入

$$\begin{cases} X_n: \text{第 } n \text{ 个顾客走后留下的人数, } n \geq 1, X_0 = 0, \\ Y_n: \text{第 } n+1 \text{ 个顾客接受服务期间来到的人数, } n \geq 0, \end{cases}$$

则

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n, & X_n > 0, \\ Y_n, & X_n = 0. \end{cases}$$



M/G/1 排队系统

对于 $j = 0, 1, \dots$, 第 $n+1$ 个顾客接受服务期间来到的人数 \sim

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = j) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_n = j | Z_{n+1} = x) \mathbb{P}(Z_{n+1} = x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P_{0j} &:= \mathbb{P}(X_2 = j | X_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = j) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dG(x), \quad j = 0, 1, \dots;\end{aligned}$$



M/G/1 排队系统

对于 $j \geq i-1, i \geq 1$,

$$\begin{aligned} P_{ij} &:= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(Y_n = j - (i-1)) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dG(x). \end{aligned}$$

也就是说,

$\{X_n, n \geq 1\}$ 是转移概率为 $(P_{ij})_{i \geq 0, j \geq 1}$ 的 Markov 链.

†



例 4.3.2 某班学生要去 A 教室上数学课, 现有两个入口 B 和 C 可以进入 A 教室.

设在时刻 $t(>0)$ 从 B 口进入 A 教室的学生人数为 $N_1(t)$, 从 C 口进入 A 教室的学生人数为 $N_2(t)$,

$$N_1(0) = N_2(0) = 0.$$

假设 $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$, $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$ 是两个强度分别为 0.5 和 1.5 的独立的 Poisson 过程. 试问:

- (1) 在一个固定的三分钟内没有学生进入 A 教室的概率是多少?
- (2) 学生到达 A 教室的时间间隔的均值是多少?
- (3) 已知一个学生进入了 A 教室, 那么他(她)是从 C 口进入的概率是多少?

(下面关注一类条件分布.)



第四节 来到时间的条件分布

先看一个简单的例子.



例 4.4.1 在 $[0, t)$ 中有一个事件发生的条件下, 这个事件发生的时间 X_1 是个均匀分布的随机变量.

事实上, 对 $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < s | N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 < s, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{在 } [0, s) \text{ 中有一个事件发生, 在 } [s, t) \text{ 中没有事件发生})}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{在 } [0, s) \text{ 中有一个事件发生})\mathbb{P}(\text{在 } [s, t) \text{ 中没有事件发生})}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

引理 4.4.1:

设 Y_1, \dots, Y_n 为 i.i.d. 随机变量序列, 其密度函数为 f , 则顺序统计量 $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ 的联合密度函数为

$$f(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(y_i), & y_1 < \dots < y_n, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

特别的, 若 $Y_1, \dots, Y_n \sim U(0, t)$, 则

$$f(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < y_1 < \dots < y_n < t, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



Poisson 过程的完全随机性

定理 4.4.1:

在已知 $N(t) = n$ 的条件下,
 n 个顾客的来到时刻 S_1, \dots, S_n 与
 n 个 $[0, t]$ 上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同分布.
即

$$f_{S_1, \dots, S_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \dots < s_n \leq t.$$



例 4.4.2 假设乘客按速率 λ 的 Poisson 过程到达一个火车站. 若火车在 t 时刻离开, 求 $(0, t)$ 中到达的乘客总的等待时间的和的平均

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right].$$



解. 对任意 n ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t - S_i) \mid N(t) = n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n(t - S_i) \mid N(t) = n\right] \\&= nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n S_i \mid N(t) = n\right] = nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n U_{(i)}\right] \\&\quad (: U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)} \text{ 是 } (0, t) \text{ 上均匀分布的顺序统计量}) \\&= nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n U_i\right] = \frac{nt}{2},\end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t - S_i)\right] = \frac{t}{2}\mathbb{E}[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

例 4.4.4 设一部仪器承受冲击, 冲击遵循参数为 λ 的 Poisson 过程来到, 第 i 次冲击造成损伤 D_i , $N(t)$ 表示 $[0, t]$ 内的冲击次数. 假定 $D_i, i \geq 1$ 独立同分布且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 假定冲击引起的损伤随时间呈指数地衰减, 即若一次冲击造成的初始损伤为 D , 时间 t 之后造成的损伤为

$$De^{-\alpha t}, \alpha > 0.$$

再假定损伤是可加的, 则在 t 时刻的损伤可表示为

$$D(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)},$$

其中 S_i 表示第 i 次冲击来的时刻. 求其期望.



下面再考虑 Poisson 过程的分流.

命题 4.4.1:

设顾客按强度 λ 的 Poisson 过程到达.

$N_i(t)$ 为 $[0, t]$ 中到达的第 i 类顾客数, $i = 1, 2$.

假定时刻 s 的到达者与其他的到达独立. 令

$$p(s) := \mathbb{P}(s \text{ 时刻到达者为第 1 类}),$$
$$1 - p(s) := \mathbb{P}(s \text{ 时刻到达者为第 2 类}),$$

则 $[0, t]$ 内到达者为第 1 类的概率 $p = \frac{1}{t} \int_0^t p(s) ds$, 且

$N_1(t) \sim P(\lambda tp)$, $N_2(t) \sim P(\lambda t(1 - p))$: 相互独立.



M/G/ ∞ 排队系统

例 4.4.3 (M/G/ ∞ 排队问题) 假设顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达一个有无穷多条服务线的服务站, 到达之后立刻被独立地提供服务, 服务时间具有共同的分布函数 G . 现关注在 t 时刻服务完毕的顾客数和仍在接受服务的顾客数的联合分布.

实际上, 可将 $[0, t]$ 中进入系统的顾客分成两种类型:

- (I 型) 到 t 时刻已经服务完毕 (总数记为 $N_1(t)$);
- (II 型) 到 t 时刻还未服务完毕 (总数记为 $N_2(t)$).



M/G/∞ 排队系统

那么, $s(\leq t)$ 时刻进入系统的顾客是 I 型的概率

$$p(s) = G(t-s), s \leq t.$$

从而由上述命题, $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 是均值为

$$\mathbb{E}[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(t-s) ds = \lambda \int_0^t G(s) ds$$

的 Poisson 分布随机变量. 类似的, $N_2(t)$ 是均值为

$$\mathbb{E}[N_2(t)] = \lambda \int_0^t \bar{G}(s) ds$$

的 Poisson 分布随机变量. 并且 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是独立的.

#



关于到达时间还有如下结果.

定理 4.4.2:

对于任意 $[0, \infty)$ 上的可积函数 f , 有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right] = \lambda \int_0^{\infty} f(t) dt.$$



例 4.4.4 (另解) 取

$$f(s) = 1_{[0,t]}(s) \cdot e^{-\alpha(t-s)},$$

则

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)} = \sum_{i \geq 1} 1_{\{S_i \leq t\}} \cdot D_i e^{-\alpha(t-S_i)} = \sum_{i \geq 1} D_i f(S_i),$$

那么

$$\begin{aligned} \mathbb{E}D(t) &= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}[D_i f(S_i)] = \mathbb{E}[D] \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} f(S_i)\right] \\ &= \mathbb{E}[D] \lambda \int_0^\infty f(s) ds = \mathbb{E}[D] \lambda \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &= \frac{\lambda \mathbb{E}[D]}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$



第六节 复合 Poisson 过程

令 Y_1, Y_2, \dots 为 i.i.d. 于分布函数 F 的随机序列, 且
与参数为 λ 的Poisson 随机变量 N 独立,

称随机变量 $W := \sum_{i=1}^N Y_i$ 是复合 Poisson 随机变量.



复合 Poisson 过程的定义

定义 4.6.1

对任意 $t \geq 0$, 定义

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

其中, Y_1, Y_2, \dots 为 i.i.d. 随机序列, 且与参数为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 则称随机过程

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ 是复合 Poisson 过程.



一些性质:

① $X(t)$ 的矩母函数

$$\phi_t(u) \equiv \mathbb{E}[e^{uX(t)}] = \exp\{\lambda t(\phi_Y(u) - 1)\}.$$

其中, $\phi_Y(u) = E[e^{uY}]$.

② 计算均值函数与方差函数如下,

$$\mathbb{E}[X(t)] = \phi'_t(0) = \lambda t \cdot \mathbb{E}Y,$$

$$\mathbf{D}(X(t)) = \phi''_t(0) - (\phi'_t(0))^2 = \lambda t \cdot \mathbb{E}Y^2.$$



例 4.6.1 设飞机场的乘客以 Poisson 过程到达, 到达的客机数平均每
小时 5 架, 客机共有 A 、 B 、 C 三种类型, 能承载的乘客数
分别为 180人、145人、80人.
假设这三种飞机出现的概率相同, 求在三小时内到达机场的
最多乘客数的数学期望.



解. 用 Y_i 表示第 i 架飞机的乘客数, $X(t)$ 表示 t 时刻为止到达机场的乘客数, 则

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_i] &= \frac{1}{3}(180 + 145 + 80) = 135, \quad \forall i, \\ \mathbb{E}[X(3)] &= \lambda \cdot 3 \mathbb{E}[Y_i] = 5 \times 3 \times 135 = 2025.\end{aligned}$$

#



定理 4.6.1:

复合 Poisson 过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 有平稳独立增量.



证. 对任意 $t > s \geq 0$, $u \in \mathbf{R}$, 同样令 $\phi_Y(u) := \mathbb{E}[e^{uY_1}]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{u(X(t)-X(s))}] &= \mathbb{E}[\exp\{u \sum_{k=N(s)+1}^{N(t)} Y_k\}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp\{u \sum_{k=N(s)+1}^{N(t)} Y_k\} | N(s), N(t)]] \\ &= \mathbb{E}[\phi_Y(u)^{N(t)-N(s)}] = \mathbb{E}[\phi_Y(u)^{N(t-s)}]\end{aligned}$$

只是 $t-s$ 的函数, 所以是平稳增量过程.



(续) 另外对 $\forall t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 > t_0 \geq 0, u_1, \cdots, u_n \in \mathbf{R},$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{\sum_{j=1}^n u_j(X(t_j) - X(t_{j-1}))\}] &= \mathbb{E}[\prod_{j=1}^n \exp\{u_j \sum_{k=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} Y_k\}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\prod_{j=1}^n \exp\{u_j \sum_{k=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} Y_k\} | N(t_0), N(t_1), \cdots, N(t_n)]] \\ &= \mathbb{E}[\prod_{j=1}^n \phi_Y(u_j)^{N(t_j) - N(t_{j-1})}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\phi_Y(u_j)^{N(t_j) - N(t_{j-1})}] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp\{u_j(X(t_j) - X(t_{j-1}))\}], \end{aligned}$$

故 $X(t_1) - X(t_0), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立, 得证. \square



例 4.6.2 某零件在运行中会受到撞击, 记在 $(0, t]$ 内受到的撞击次数为 $N(t)$, 设 $\{N(t)\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.
各次撞击带来的磨损量分别为 ζ_1, ζ_2, \dots , 假设它们是独立同服从参数为 β 的指数分布, 且与 $N(t)$ 独立.
如果磨损量大于等于 $\alpha (> 0)$ 则更换零件.
计算零件的平均寿命.



解. 假设此零件的寿命是 η , 令 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$, 则
 $\eta = \inf\{t > 0 : X(t) \geq \alpha\}.$

$$\mathbb{E}\eta = \int_0^\infty \mathbb{P}(\eta > t)dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) < \alpha)dt,$$

而

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) < \alpha) &= \sum_n \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X(t) < \alpha | N(t) = n) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k < \alpha | N(t) = n\right) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k < \alpha\right) \quad (\because \{\xi_k\} \text{ 与 } \{N(t)\} \text{ 独立}). \end{aligned}$$



令 $M(t) := \sup\{n \geq 0 : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t\}$, 则 $\{M(t)\}$ 是参数为 β 的 Poisson 过程,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k < \alpha\right) = \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n).$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\eta &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X(t) < \alpha) dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n) dt.\end{aligned}$$



因为

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dt = \frac{1}{\lambda n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du = \frac{1}{\lambda},$$

而 $M(\alpha)$ 是非负整数值随机变量, 所以

$$\mathbb{E}[M(\alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M(\alpha) > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n),$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n) = \frac{1}{\lambda} (1 + \mathbb{E}[M(\alpha)]) \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 + \alpha\beta). \end{aligned}$$

上例答案解析

$$\mathbb{E}[\eta] = \frac{1}{\lambda}(1 + \alpha\beta),$$

其中参数的含义如下:

- (1) λ 是平均撞击次数.
 λ 越大撞击次数越多, 零件受损越严重, 使用寿命越短.
- (2) β 是每次撞击时平均磨损量的倒数.
 β 越大, 每次撞击时平均磨损量越小, 所以寿命越长.
- (3) α 是设计时允许零件受损的上限.
 α 越大, 寿命越长.



Lundberg-Cramer 经典破产模型

假设保险公司在时刻 t 的盈余可表示为：

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0$$

其中, $U(0) = u$ 表示保险公司的初始盈余, c 为保险公司单位时间征收的保险费率, 忽略利息, 则

到时刻 t 为止发生的索赔费为 ct .

假设累积索赔金额 $S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ 是复合Poisson过程, 即为
Lundberg-Cramer 经典破产模型.



例题. 保险理赔按速率 λ 的 Poisson 过程到达. 设各人理赔金额独立同分布(且独立于此 Poisson 过程), 具有均值为 μ 的分布 G . 以 S_i 和 C_i 分别表示第 i 次理赔的时间和金额. 则到 t 为止总理赔的折扣价值为

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_i} C_i,$$

这里 $\alpha \geq 0$ 为折扣率, $N(t)$ 为到 t 为止的理赔次数.
计算 $\mathbb{E}(D(t))$.

(类似于例 4.4.4.)



解. 对任意正整数 n ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D(t)|N(t) = n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\alpha S_i} C_i | N(t) = n\right] \\&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{-\alpha S_i} C_i | N(t) = n] \\&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[C_i | N(t) = n] \mathbb{E}[e^{-\alpha S_i} | N(t) = n] \\&= \mathbb{E}[G] \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n e^{-\alpha S_i} | N(t) = n\right]\end{aligned}$$



令 $U_i, i = 1 \cdots n$ 是独立同分布的 $[0, t]$ 均匀随机变量, 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n e^{-\alpha S_i} \mid N(t) = n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n e^{-\alpha U_i}\right] \\ &= \frac{n}{t} \int_0^t e^{-\alpha x} dx = \frac{n}{\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}).\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[D(t) \mid N(t)] = \frac{N(t)}{\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) \mathbb{E}[G],$$

取期望得

$$\mathbb{E}[D(t)] = \frac{\lambda \mathbb{E}[G]}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}).$$

#

